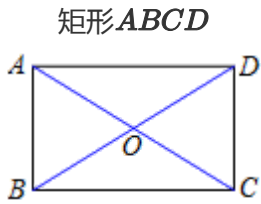


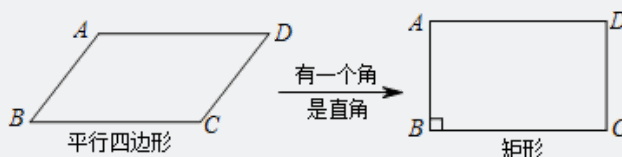
第2讲 矩形与菱形

一、矩形的性质

 矩形 $ABCD$	定义	有一个角是____的____叫做矩形.
	性质	矩形的对边____且____. 书写:
		矩形的四个角都是____. 书写:
		矩形的对角线____并且互相____. 书写:
	直角三角形斜边中线	直角三角形斜边上的中线等于斜边的_____.

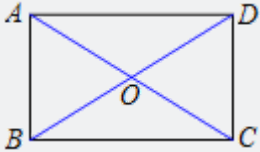
【教法备注】

1、矩形的定义：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形．



2、矩形的性质：

- ①矩形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质
- ②由于它有一个角是直角，因此还具有自己独特的性质

图形	性质		符号表示
矩形 $ABCD$ 	边	矩形的对边平行且相等	$AB = CD$, $AD = BC$ $AB // CD$, $AD // BC$
	角	矩形的四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD$ $= \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	矩形的对角线相等 矩形的对角线互相平分	$AC = BD$ $OA = OC = OB = OD$

书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$,

$AB // CD$, $AD // BC$,

$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$,

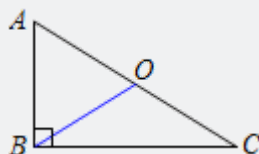
$AC = BD$,

$OA = OC = OB = OD$,

注意：做题时根据实际需要，只写出相应的性质即可。

3、直角三角形斜边中线：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OC$ ，则 $OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。



书写：

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，

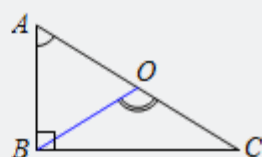
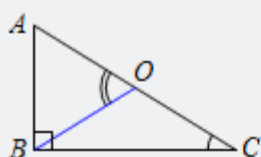
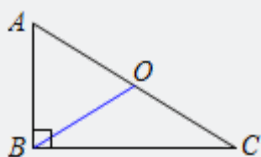
$\therefore OB = OA = OC = \frac{1}{2}AC$ 。

【拓展】

(1) 已知，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $OA = OB$ ，则 $OA = OC$ 。

(2) 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $OA = OB = OC$ ，则 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

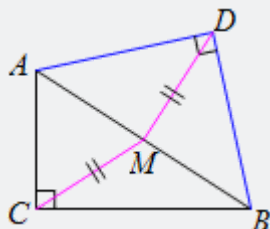
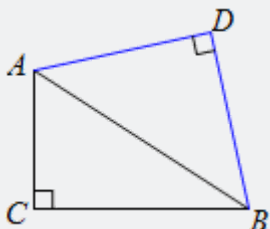
(3) 已知， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC$ ，则 $\angle AOB = 2\angle C$ ， $\angle BOC = 2\angle A$ 。



遇存在公共边的两个直角三角形时，要想到构造两个直角三角形斜边的中线。

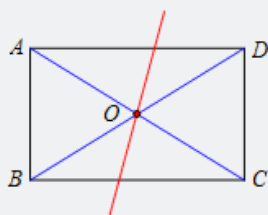
如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 有公共斜边 AB 。

辅助线作法：取 AB 中点 M ，连接 CM 、 DM ，可证明 $CM=DM$ 。



4、矩形的对称性：矩形是中心对称图形，也是轴对称图形。

①矩形的对称中心是对角线的交点，过这点的任意直线可将矩形分成两个全等的图形。



②矩形有2条对称轴，是过对边中点的直线就是它的对称轴。

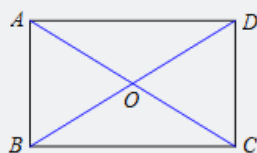


总结：

①矩形的对边平行且相等，邻边互相垂直；四个角都是直角，对角线互相平分且相等。

②全等三角形有： $\triangle ABC \cong \triangle DCB \cong \triangle BAD \cong \triangle CDA$ ， $\triangle AOD \cong \triangle COB$ ， $\triangle AOB \cong \triangle COD$

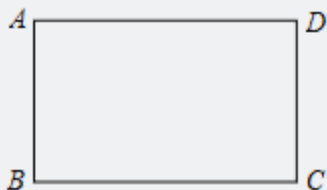
③对角线将矩形分成4个面积相等的等腰三角形。



5、矩形的周长：

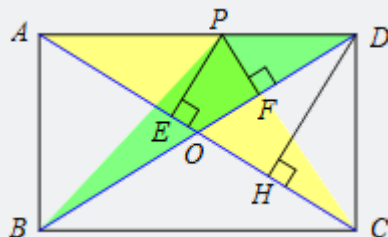
①矩形的周长：一组邻边之和的2倍。如图，周长 $C = 2(AB + BC)$ 。

②矩形的面积：一组邻边的乘积。如图，面积 $S = AB \cdot BC$ 。

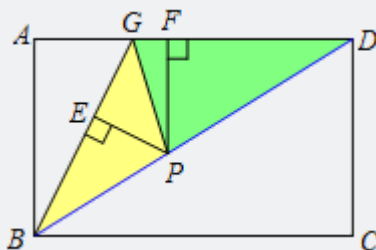


【拓展】

(1) 已知：点 P 是矩形边 AD 上一点， $PE \perp AC$ ， $PF \perp BD$ ， $DH \perp AC$ ，则 $PE + PF = DH$ 。



(2) 已知：点 G 是矩形边 AD 上一点， $BG = DG$ ，点 P 是矩形对角线 BD 上一点， $PE \perp BG$ ， $PF \perp AD$ ，则 $PE + PF = AB$ 。



|| 例题

1. 如果矩形的一条对角线长为 8cm ，两条对角线的一个夹角为 120° ，则矩形的较短边长为（ ）。

A. 4cm

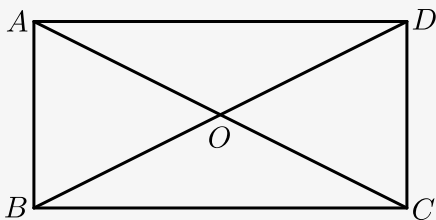
B. $4\sqrt{2}\text{cm}$

C. $4\sqrt{3}\text{cm}$

D. 8cm

【答案】 A

【解析】 如图， $\angle AOD = 120^\circ$ ， $AC = 8\text{cm}$ 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BD = AC = 8\text{cm}$ ， $OA = OB = 4\text{cm}$ 。

$\because \angle AOD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB = OA = 4\text{cm}$.

故选A .

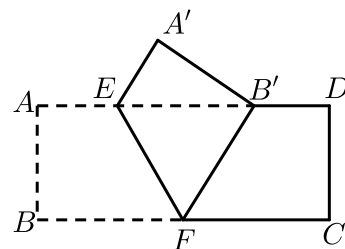
【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2019~2020学年天津和平区初二下学期期中第7题3分

2. 如图，把矩形 $ABCD$ 沿 EF 翻折，点 B 恰好落在 AD 边的 B' 处，若 $AE = 2$ ， $DE = 6$ ， $\angle EFB' = 60^\circ$ ，则矩形 $ABCD$ 的面积是（ ） .



A. 12

B. 24

C. $12\sqrt{3}$

D. $16\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】 $\because$ 折叠

$\therefore \angle BFE = \angle EFB' = 60^\circ$ ， $AB = A'B'$ ， $\angle A = \angle A' = 90^\circ$ ， $AE = A'E = 2$

$\because ABCD$ 是矩形

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle DEF = \angle EFB = 60^\circ$

$\therefore A'E \parallel B'F$

$\therefore \angle A'EF + \angle EFB' = 180^\circ$

$\therefore \angle A'EF = 120^\circ$

$\therefore \angle A'EB' = 60^\circ$ 且 $\angle A' = 90^\circ$

$\therefore \angle A'B'E = 30^\circ$ ，且 $A'E = 2$

$\therefore B'E = 4$ ， $A'B' = 2\sqrt{3} = AB$

$\because AE = 2$ ， $DE = 6$

$\therefore AD = 8$

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = AB \times AD = 2\sqrt{3} \times 8 = 16\sqrt{3}$.

故选D .

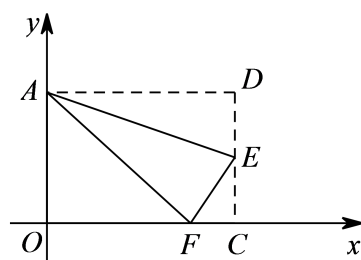
【标注】【知识点】其它翻折问题

【重点强调】

2018~2019学年天津南开区天津市第五十中学初二下学期期中第6题3分

3. 如图，在平面直角坐标系中，长方形纸片的 AB 边在 y 轴上， BC 边在 x 轴上， B 与坐标原点重合，折叠长方形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的 F 处，折痕为 AE ，已知 A 点坐标为 $(0, 8)$ ， C 点坐标为 $(10, 0)$ 。

求： E 点坐标。



【答案】 $(10, 3)$ 。

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，点 B 与点 O 重合，

$$\therefore DC = AB = 8, AF = AD = BC = 10.$$

$$\text{设 } EF = DE = x, EC = 8 - x;$$

$$\text{由勾股定理得：} BF^2 = 10^2 - 8^2,$$

$$\therefore BF = 6,$$

$$\therefore CF = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle EFC\text{中，由勾股定理得：} x^2 = 4^2 + (8 - x)^2,$$

$$\text{解得：} x = 5,$$

$$EC = 8 - 5 = 3.$$

$$\therefore E\text{点的坐标为}(10, 3).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

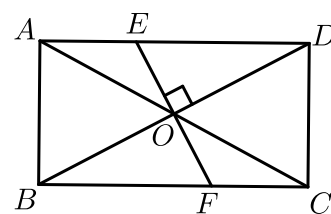
【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二下学期期中第21题

|| 练习

4.

如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ，过点 O 作 BD 的垂线分别交 AD ， BC 于 E ， F 两点．若 $AC = 2\sqrt{3}$ ， $\angle AEO = 120^\circ$ ，则 FC 的长度为（ ）．



A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 A

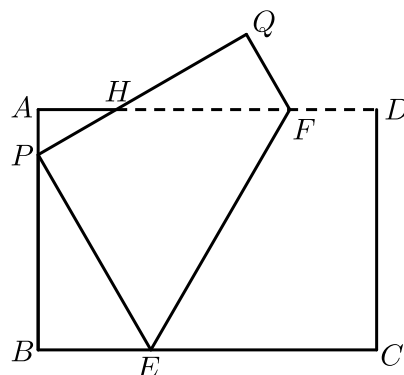
【解析】 $\because EF \perp BD$ ， $\angle AEO = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle EDO = 30^\circ$ ， $\angle DEO = 60^\circ$ ，
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
 $\therefore \angle OBF = \angle OCF = 30^\circ$ ， $\angle BFO = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle FOC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ，
 $\therefore OF = CF$ ，
 又 $\because$ Rt $\triangle BOF$ 中， $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore OF = \tan 30^\circ \times BO = 1$ ，
 $\therefore CF = 1$ ．
 故选：A．

【标注】 【知识点】解直角三角形的定义及常见类型

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区初二下学期期中第一学片第9题3分

5. 在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 3\sqrt{3}$ ， $BC = 6$ ，沿 EF 折叠后，点 C 落在 AB 边上的点 P 处，点 D 落在点 Q 处， AD 与 PQ 相交于点 H ， $\angle BPE = 30^\circ$ ．



- (1) 求 BE , QF 的长 .
- (2) 求四边形 $PEFH$ 的面积 .

【答案】 (1) $BE = 2$, $QF = 1$.

(2) $7\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 设 $BE = x$, 则 $EC = 6 - x$,

$$\because \angle BPE = 30^\circ, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}PE,$$

由折叠知 $PE = EC$,

$$\therefore x = \frac{1}{2}(6 - x),$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore PE = 4 = EC,$$

$$\therefore PB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AP = \sqrt{3},$$

$$\because \angle QPE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APH = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AHP = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = 2AP = 2\sqrt{3},$$

$$\because PQ = DC = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore HQ = \sqrt{3},$$

$$\because \angle Q = \angle D = 90^\circ, \angle QHF = \angle AHP = 30^\circ,$$

$$\therefore QF = \frac{1}{2}HF,$$

$$\text{又 } QF^2 + HQ^2 = FH^2,$$

$$\therefore QF = 1.$$

$$\begin{aligned} (2) S_{\text{四边形}PEFH} &= S_{\text{四边形}PEFQ} - S_{\triangle HFQ} \\ &= S_{\text{四边形}CEFD} - S_{\triangle HFQ} \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

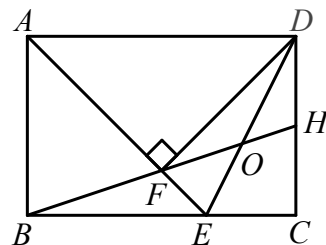
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

【重点强调】

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = \sqrt{2}AB$, AE 平分 $\angle BAD$, $DF \perp AE$ 于 F , BF 交 DE 、 CD 于 O 、 H , 下列结论:

① $\angle DEA = \angle DEC$; ② $BF = FH$; ③ $OE = OD$; ④ $BC - CH = 2EF$.

其中正确结论的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, AE 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \angle AEB = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ABE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AFD$ 与 $\triangle ABE$ 都为等腰直角三角形, 即 $AF = DF$, $AB = BE$.

$$\therefore AE = \sqrt{2}AB.$$

$$\text{又} \because AD = \sqrt{2}AB.$$

$$\therefore AD = AE.$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = 67.5^\circ.$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 45^\circ - 67.5^\circ = 67.5^\circ$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DEC, \text{选项①正确};$$

过 F 作 $GM \perp AD$, 与 AD 交于 G 点, 与 BC 交于 M 点,

利用三线合一得到 G 为 AD 中点

$\therefore F$ 为 BH 中点, M 为 BC 中点

$$\therefore BF = FH, \text{选项②正确};$$

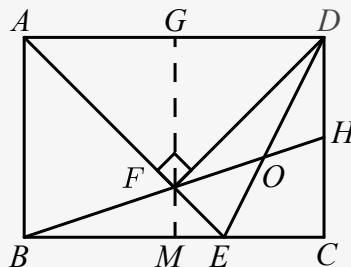
$$\therefore AD = \sqrt{2}AF, AD = \sqrt{2}AB,$$

$$\therefore AF = AB.$$

$$\therefore \angle AFB = 67.5^\circ.$$

$$\therefore \angle OFE = \angle OEF = 67.5^\circ.$$

$$\therefore OE = OF.$$



$$\therefore \angle ODF = \angle OFD = 22.5^\circ .$$

$$\therefore OF = OD .$$

$$\therefore OD = OE , \text{ 选项③正确 ;}$$

$$\therefore \angle DEF = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ , \angle EDC = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ .$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DEC .$$

$$\therefore EF \perp DF , EC \perp CD ,$$

$$\therefore EF = EC .$$

$$\therefore \triangle EFM \text{ 为等腰直角三角形}$$

$$\therefore FM = ME .$$

$$\therefore BC - CH = 2CM - 2FM = 2CM - 2ME = 2EF , \text{ 选项④正确 ;}$$

则正确的序号有4个 .

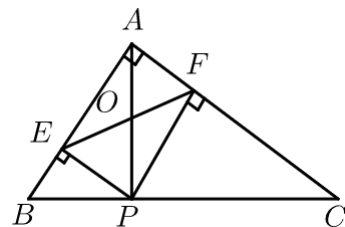
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】矩形的性质

【知识点】等腰直角三角形的性质

例题

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$, P 是斜边 BC 上一动点, $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp AC$ 于 F , EF 与 AP 相交于点 O , 则 OF 的最小值为 () .



A. 4.8

B. 1.2

C. 3.6

D. 2.4

【答案】D

【解析】 $\because \angle BAC = 90^\circ$, $PE \perp AB$, $PF \perp AC$,

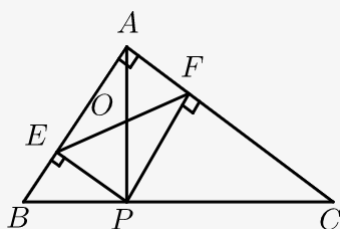
$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形,

$\therefore EF, AP$ 互相平分. 且

$$EF = AP, OE = OF,$$

$\therefore$ 当 AP 的值最小时, OF 的值就最小,

$\therefore$ 当 $AP \perp BC$ 时, AP 的值最小, 即 OF 的值最小.



$$\therefore \frac{1}{2}AP \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC,$$

$$\therefore AP \cdot BC = AB \cdot AC.$$

$$\therefore AB = 6, AC = 8,$$

在Rt $\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$$\therefore 10AP = 6 \times 8$$

$$\therefore AP = \frac{24}{5}.$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AP = \frac{12}{5}.$$

故选D.

【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

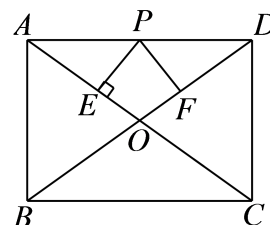
【知识点】垂线段最短

【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第8题

8. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 4$, P 是 AD 上的一动点, $PE \perp AC$, $PF \perp BD$, 垂足分别为 E , F , 则 $PE + PF = \underline{\hspace{2cm}}$.

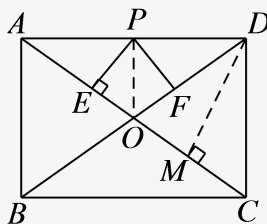


【答案】 $\frac{12}{5}$ 或 2.4 或 $2\frac{2}{5}$

【解析】连接 OP , 过 D 作 $DM \perp AC$,

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot DM,$$

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle DOP}$$



$$= \frac{1}{2} \cdot AO \cdot PE + \frac{1}{2} \cdot OD \cdot PF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AO = BO = CO = DO,$$

$$\begin{aligned}
S_{\triangle AOD} &= \frac{1}{2} AO \cdot (PE + PF), \\
\therefore \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DM &= \frac{1}{2} \cdot AO \cdot (PE + PF), \\
\therefore DM &= PE + PF, \text{ Rt}\triangle ACD, AD = 4, CD = 3, \\
\therefore AC &= 5, \\
DM &= \frac{AD \cdot CD}{DC} = \frac{12}{5}, \\
\therefore PE + PF &= \frac{12}{5}. \\
\text{故答案为: } &\frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】矩形的性质

【知识点】勾股定理

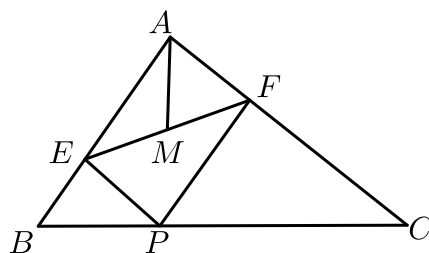
【能力】推理论证能力

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第15题

练习

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， P 为边 BC 上一动点（ P 不与 B 、 C 重合）， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的取值范围是 _____ .



【答案】 $\frac{6}{5} \leq AM < 2$

【解析】易证：四边形 $AEPF$ 为矩形， $BC = 5$ ，

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AP,$$

当 $AP \perp BC$ 时， AP 取得最小值，

$$\text{此时 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AP \times BC$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC,$$

$$\therefore AP = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AM \text{ 最小值为 } \frac{6}{5},$$

当 P 与 C 重合时， AP 取得最大值4，

$\therefore P$ 不与 B 、 C 重合，

$\therefore AP < 4$ ，

$\therefore AM < 2$ ，

$\therefore \frac{6}{5} \leq AM < 2$ 。

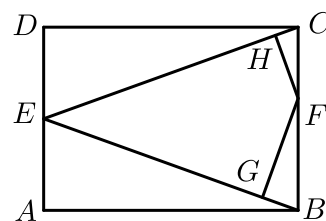
【标注】【能力】运算能力

【知识点】垂线段最短

【知识点】矩形的判定及应用

【知识点】矩形的性质

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 2$ ，点 E 为 AD 中点，点 F 为 BC 边上任一点，过点 F 分别作 EB ， EC 的垂线，垂足分别为点 G ， H ，则 $FG + FH$ 为（ ）。



A. $\frac{5}{2}$

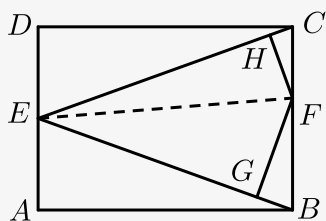
B. $\frac{5}{2}\sqrt{10}$

C. $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

D. $\frac{3}{5}\sqrt{10}$

【答案】D

【解析】连接 EF ，如图所示：



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD = 3$ ， $AD = BC = 2$ ， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 E 为 AD 中点，

$\therefore AE = DE = 1$ 。

$\therefore BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中 $\begin{cases} AE = DE \\ \angle A = \angle D \\ AB = DC \end{cases}$ 。

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE$ (SAS)。

$\therefore BE = CE = \sqrt{10}$ 。

$\therefore \triangle BCE$ 的面积 = $\triangle BEF$ 的面积 + $\triangle CEF$ 的面积 .

$$\therefore \frac{1}{2}BC \times AB = \frac{1}{2}BE \times FG + \frac{1}{2}CE \times FH .$$

$$\text{即 } BE(FG + FH) = BC \times AB .$$

$$\text{即 } \sqrt{10}(FG + FH) = 2 \times 3 .$$

$$\text{解得 : } FG + FH = \frac{3\sqrt{10}}{5} .$$

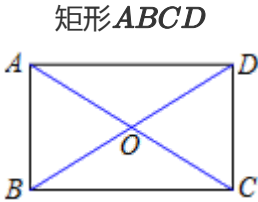
故选 : D .

【标注】【知识点】矩形与全等综合

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区初二下学期期中第8题3分

二、矩形的判定

 矩形 $ABCD$	判定	有一个角是____的____是矩形 . 书写 :
		对角线____的____是矩形 . 书写 :
		有三个角是____的____是矩形 . 书写 :

【教法备注】

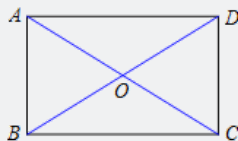
1、有一个角是直角的平行四边形是矩形 .



书写 : $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 , $\angle A = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 .

2、对角线相等的平行四边形是矩形 .



书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形。

3、有三个角是直角的四边形是矩形。



书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形。

总结：

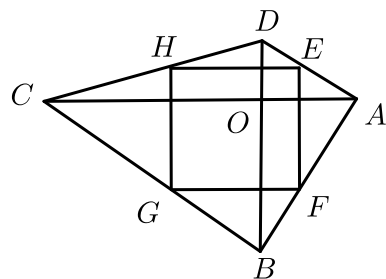
① 证明一个四边形是矩形，一般情况下，先证明它是一个平行四边形，然后证明“有一个角为直角”或“对角线相等”即可。

② 若直接证明一个四边形是矩形，只要证明有三个角是直角即可。

③ 对角线相等且平分的四边形是矩形。

例题

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$ ，垂足为 O ，点 E 、 F 、 G 、 H 分别为边 AD 、 AB 、 BC 、 CD 的中点。若 $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积为 _____。



【答案】 12

【解析】 $\because$ 点 E 、 F 分别为四边形 $ABCD$ 的边 AD 、 AB 的中点，

$\therefore EF \parallel BD$ ，且 $EF = \frac{1}{2}BD = 3$ 。

同理求得 $EH \parallel AC \parallel GF$ ，且 $EH = GF = \frac{1}{2}AC = 4$ ，

又 $\because AC \perp BD$ ，

$\therefore EF \parallel GH, FG \parallel HE$ 且 $EF \perp FG$.

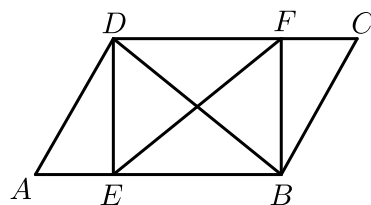
四边形 $EFGH$ 是矩形.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积 $= EF \cdot EH = 3 \times 4 = 12$, 即四边形 $EFGH$ 的面积是 12.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

【知识点】矩形的周长与面积

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在 AB 、 CD 上, 且 $AE = CF$, 连接 EF , BD . 若 $EF = BD$, 求证: 四边形 $DEBF$ 为矩形.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore \angle A = \angle C, AD = BC, AB = CD$.

$\because CF = AE$,

$\therefore BE = DF, \triangle ADE \cong \triangle CBF$,

$\therefore DE \parallel BF$,

$\therefore DEBF$ 为平行四边形,

$\therefore DE = BF, DF = DF, BD = EF$,

$\therefore \triangle EDF \cong \triangle BFD$,

$\therefore \angle EDF = \angle BFD$,

$\therefore BF \parallel DE$,

$\therefore \angle EDF + \angle BFD = 180^\circ$,

$\therefore \angle EDF = \angle BFD = 90^\circ$,

$\therefore DEBF$ 为矩形.

【标注】【知识点】矩形的判定-从四边形

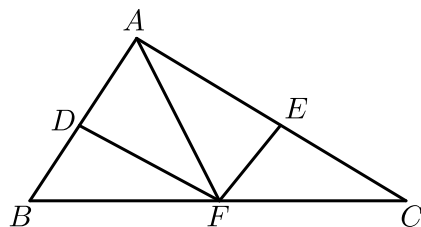
【重点强调】

2017~2018 学年天津河西区初二下学期期中第一学片第 22 题



练习

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点，且 $BC = 2AF$ 。



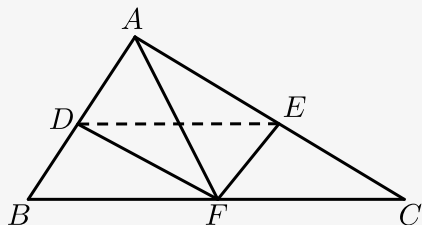
- (1) 求证：四边形 $ADFE$ 为矩形。
 (2) 若 $\angle C = 30^\circ$ ， $AF = 2$ ，写出矩形 $ADFE$ 的周长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $2\sqrt{3} + 2$ 。

【解析】 (1) 方法一：连接 DE ，

$\because E, F$ 分别是边 AC, BC 的中点， $\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB$ 。



$\because$ 点 D 是边 AB 的中点，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AD = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 为平行四边形。

由点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点，可得：

$$DE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because BC = 2AF,$$

$$\therefore 2DE = 2AF, \text{ 即 } DE = AF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 为矩形。

方法二： $\because E, F$ 分别是边 AC, BC 的中点， $\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB$ ，

$$BC = 2BF,$$

$\because$ 点 D 是边 AB 的中点，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AD = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 为平行四边形 ,

$\therefore BC = 2AF$,

$\therefore BF = AF$,

$\therefore$ 点 D 是边 AB 的中点 ,

$\therefore DF \perp AB$,

$\therefore \angle ADF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 为矩形 .

(2) $\therefore$ 四边形 $ADFE$ 为矩形 , $AF = 2$, $BC = 2AF$,

$\therefore \angle FEC = 90^\circ$, $FC = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中 , $\angle C = 30^\circ$,

$\therefore FE = \frac{1}{2}FC = 1$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中由勾股定理得 , $AE = \sqrt{AF^2 - FE^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 矩形 $ADFE$ 的周长 $= 2 + 2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】矩形的性质

【能力】推理论证能力

14. 如图 , 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AC = 12\text{cm}$, 点 E 从点 A 出发沿 AB 以每秒 1cm 的速度向点 B 运动 , 同时点 D 从点 C 出发沿 CA 以每秒 2cm 的速度向点 A 运动 , 运动时间为 t 秒 ($0 < t < 6$) , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F .

(1) 试用含 t 的式子表示 AE 、 AD 、 DF 的长 .

(2) 如图① , 连接 EF , 求证四边形 $AEFD$ 是平行四边形 .

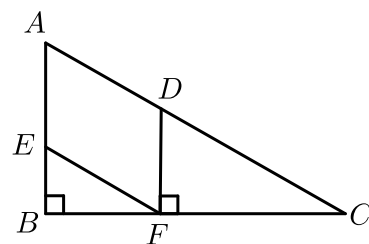


图 ①

(3) 如图② , 连接 DE , 当 t 为何值时 , 四边形 $EBFD$ 是矩形 ? 并说明理由 .

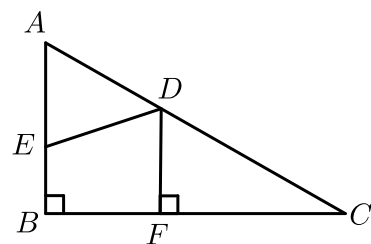


图 ②

【答案】(1) $AE = t$, $AD = 12 - 2t$,

$$DF = \frac{1}{2}CD = t.$$

(2) 证明见解析.

(3) $t = 3$ 时, 四边形 $EBFD$ 是矩形, 证明见解析.

【解析】(1) 由题意得, $AE = t$, $CD = 2t$,

$$\text{则 } AD = AC - CD = 12 - 2t,$$

$$\because DF \perp BC, \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}CD = t.$$

(2) $\because \angle ABC = 90^\circ$, $DF \perp BC$,

$$\therefore AB \parallel DF,$$

$$\because AE = t, DF = t,$$

$$\therefore AE = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

(3) 当 $t = 3$ 时, 四边形 $EBFD$ 是矩形,

理由如下: $\because \angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm},$$

$$\because BE \parallel DF,$$

$$\therefore BE = DF \text{ 时, 四边形 } EBFD \text{ 是平行四边形, 即 } 6 - t = t,$$

$$\text{解得, } t = 3,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是矩形,

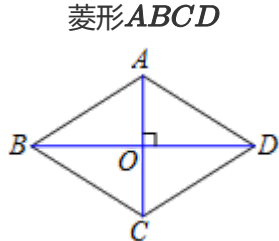
$\therefore t = 3$ 时, 四边形 $EBFD$ 是矩形.

【标注】【知识点】一元一次方程的几何问题

【重点强调】

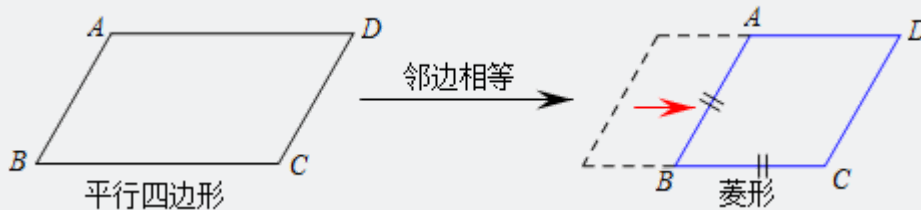
2017~2018学年天津滨海新区初二下学期期末第24题10分

三、菱形的性质

 菱形$ABCD$	定义	有一组_____的_____叫做菱形.
	性质	菱形的四条边都____, 菱形的对边____. 书写:
		菱形的对角____. 书写:
		菱形的两条对角线互相____, 并且每一条对角线____一组对角. 书写:
	面积	菱形的面积=____=_____

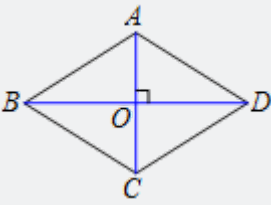
【教法备注】

1、菱形的定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形．



2、菱形的性质：

菱形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质，还具有自己独特的性质．

图形	性质		符号表示
菱形 $ABCD$ 	边	菱形的四条边都相等 菱形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	菱形的对角相等	$\angle DAB = \angle BCD,$ $\angle ABC = \angle ADC$
	对角线	菱形的两条对角线互相平分 菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角	$OA = OC,$ $OB = OD$ $AC \perp BD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

注意：加粗字体为菱形具有而平行四边形没有的性质。

书写：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD = DA, AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

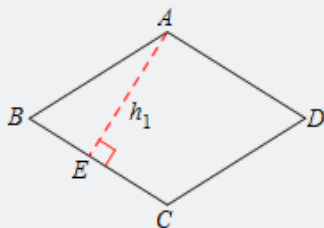
$\angle DAB = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC, OA = OC, OB = OD, AC \perp BD,$

AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD, BD$ 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 。

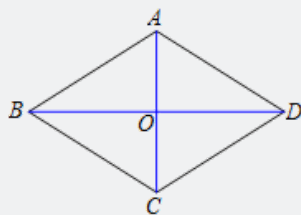
注意：做题时根据实际需要，只写出相应的性质即可。

3、菱形的面积：

①菱形的面积等于底乘以高。如图，面积 $S_{\text{菱形}ABCD} = BC \cdot AE$ 。



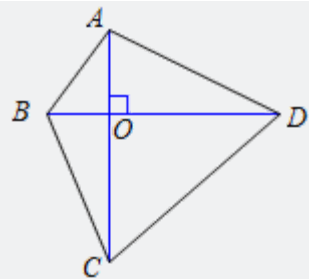
②菱形的面积等于对角线乘积的一半。如图，面积 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 。



【拓展】

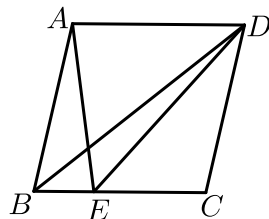
对角线互相垂直的四边形的面积都可以通过对角线乘积的一半来计算。

如图，四边形 $ABCD$ ， $AC \perp BD$ ，则 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 。



例题

15. 如图， E 是菱形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，且 $\angle DAE = \angle ABC = 80^\circ$ ，连接 BD ， DE ，那么 $\angle BDE$ 的度数为（ ）。



A. 10°

B. 15°

C. 25°

D. 30°

【答案】A

【解析】 $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle DAE = \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore AE = AB = AD,$$

$$\triangle AED \text{ 中, } AE = AD, \angle DAE = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 50^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BDC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BDC - \angle CDE = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

【标注】【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

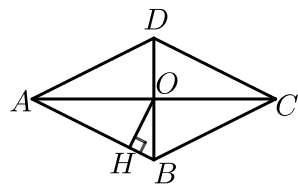
【思想】数形结合思想

【重点强调】

2018~2019学年天津河西区初二下学期期中（第三学片）第10题3分

16.

如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，过点 O 作 $OH \perp AB$ ，垂足为 H ，则点 O 到边 AB 的距离 $OH =$ _____。



【答案】 $\frac{12}{5}$ 或 2.4 或 $2\frac{2}{5}$

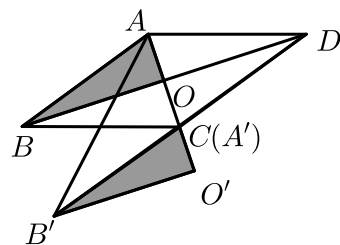
【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $AC = 8$ ， $BD = 6$ ，
 $\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 4$ ， $BO = \frac{1}{2}BD = 3$ 。
 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5$ ，
 $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}AB \cdot OH$ ，
 $\therefore 4 \times 3 = 5OH$ ，
 $\therefore OH = \frac{12}{5}$ 。

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2015~2016学年天津和平区天津市第一中学初二下学期期中第15题

17. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 交于点 O ， $AC = 4$ ， $BD = 16$ ，将 $\triangle ABO$ 沿点 A 到点 C 的方向平移，得到 $\triangle A'B'O'$ 。当点 A' 与点 C 重合时，点 A 与点 B' 之间的距离为（ ）。



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
 $\therefore AC \perp BD$ ， $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 2$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 8$ ，
 $\therefore \triangle ABO$ 沿点 A 到点 C 的方向平移，得到 $\triangle A'B'O'$ ，点 A' 与点 C 重合，
 $\therefore O'C = OA = 2$ ， $O'B' = OB = 8$ ， $\angle C'O'B' = 90^\circ$ ，

$$\therefore AO' = AC + O'C = 6,$$

$$\therefore AB' = \sqrt{O'B'^2 + AO'^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

故选：C．

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】平移作图

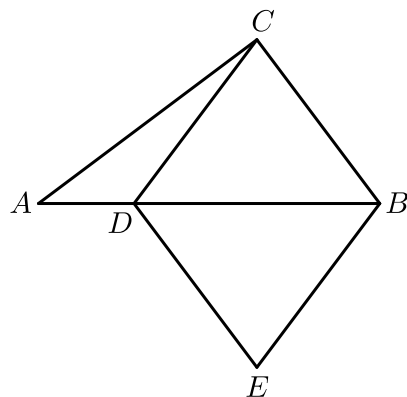
【知识点】平移的性质

【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

【方法】图象法

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， D 为 AB 上一点，以 CD ， CB 为边作菱形 $CDEB$ ，则 AD 的长为 _____ ．



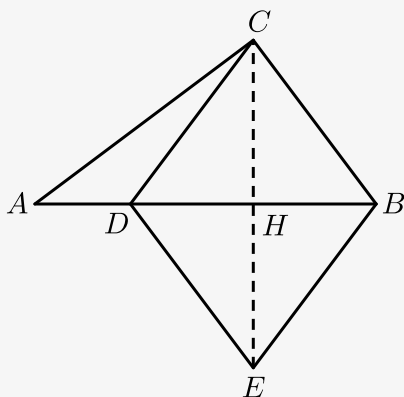
【答案】 $\frac{7}{5}$

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$AC = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

连接 CE 交 AB 于点 H ，



在菱形 $CDEB$ 中, $CE \perp BD$ 且 $HD = HB$, $CD = CB$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC,$$

$$\therefore CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5},$$

$$\text{在Rt}\triangle BCH\text{中}, HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AD = AB - 2BH = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5}.$$

【标注】【能力】推理论证能力

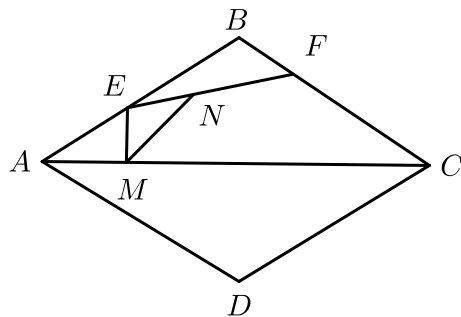
【知识点】菱形的性质

【知识点】勾股定理

【重点强调】

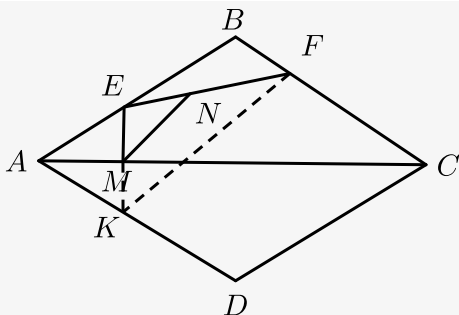
2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期中第18题3分

19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为8, $\angle BAD = 60^\circ$, 点 E 在 AB 上运动, 点 F 在 BC 上运动 (E, F 两点可以和菱形的顶点重合), 且 $EF = 4$, 点 N 是线段 EF 的中点, $ME \perp AC$ 垂足为 M , 则 MN 的最小值是 _____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】延长 EM 交 AD 于 K , 连接 FK ,

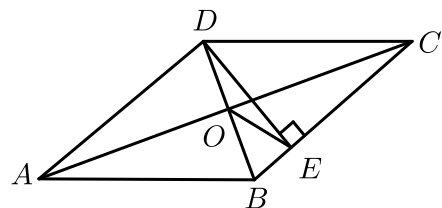


$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 ,
 $\therefore \angle BAC = \angle DAC$,
 $\because EM \perp AC$,
 $\therefore \angle AME = \angle AMK = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEK + \angle EAM = 90^\circ$, $\angle AKM + \angle MAK = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEK = \angle AKM$,
 $\therefore AE = AK$, $EM = KM$,
 $\because EN = NF$,
 $\therefore MN = \frac{1}{2}KF$,
 $\therefore$ 当 $KF \perp AD$ 时 , KF 的值最小 ,
 $\because \angle BAD = 60^\circ$, $AB = AD = 8$,
 $\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = AD \cdot FK$,
 $\therefore 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 8 \times FK$,
 $\therefore FK = 4\sqrt{3}$,
 $\therefore MN$ 的最小值 $= \frac{1}{2}KF = 2\sqrt{3}$.
 故答案为 $2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

练习

20. 如图 , 菱形 $ABCD$ 中 , AC 交 BD 于点 O , $DE \perp BC$ 于点 E , 连接 OE , 若 $\angle ABC = 140^\circ$, 则 $\angle OED = (\quad)$.



A. 10°

B. 15°

C. 20°

D. 25°

【答案】C

【解析】在菱形 $ABCD$ 中

$$\angle ABC = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = 70^\circ,$$

$$\text{又} \because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在} \text{Rt}\triangle DBE \text{中},$$

$$\angle BDE = 20^\circ,$$

$$\text{又} \because \text{在菱形} ABCD \text{中}, O \text{为} BD \text{中点},$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BD = OD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle OED = 20^\circ,$$

$$\text{即} \angle OED = 20^\circ.$$

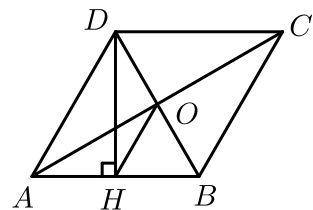
故选C.

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2019~2020学年天津河东区天津市育才中学初二下学期期中第10题3分

21. 如图, 菱形 $ABCD$ 的周长为24, 对角线 AC , BD 交于点 O , $\angle DAB = 60^\circ$, 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 连接 OH , 则 OH 的长为().



A. 2

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】在菱形 $ABCD$ 中,

$$AD = AB = BC = CD,$$

$$AC \perp BD,$$

$$\because \text{菱形} ABCD \text{周长为} 24,$$

$$\therefore AD = AB = BC = CD = 6,$$

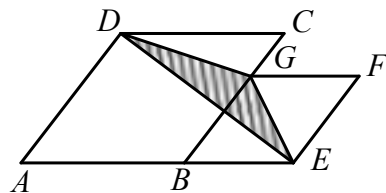
又 $\because \angle DAB = 60^\circ$, $AD = AB$,
 $\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,
 又 $\because DH \perp AB$,
 $\therefore H$ 为 A, B 中点,
 在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $OH = \frac{1}{2}AB = 3$.
 故选B.

【标注】【知识点】等边三角形的判定

【知识点】菱形的性质

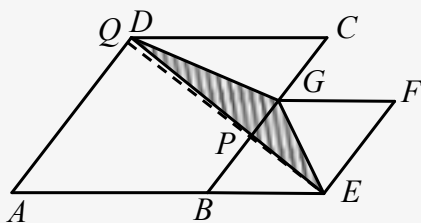
【能力】推理论证能力

22. 如图, 菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 的边长分别为3和2, $\angle A = 60^\circ$, 则图中阴影部分的面积是 _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

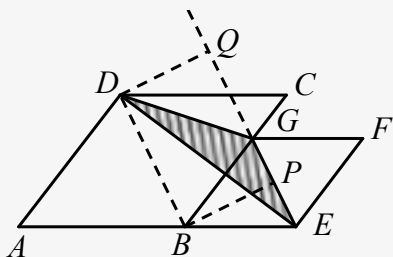
【解析】方法一: 过点 E 作 $EQ \perp AD$ 于点 Q , 记 BC 与 DE 交点为 P ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore BC \parallel AD$,
 $\therefore \triangle BPE \sim \triangle ADE$,
 $\therefore \frac{BP}{AD} = \frac{EB}{EA}$, 即 $\frac{BP}{3} = \frac{2}{5}$,
 解得: $BP = \frac{6}{5}$,
 $\therefore PG = BG - BP = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$,
 在 $\text{Rt}\triangle AQE$ 中, $\because \angle A = 60^\circ$,
 $\therefore QE = AE \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{1}{2} \times PG \times EQ = \sqrt{3}.$$

方法二：如图2，连接 BD ，过点 D 作 $DQ \perp EG$ ，交 EG 延长线于点 Q ，作 $BP \perp GE$ ，



$\therefore \angle A = 60^\circ$ ，且四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 均为菱形，

$\therefore \angle DBA = \angle GEB = 60^\circ$ ，

$\therefore BD \parallel GE$ ，

$\therefore DQ = BP$ ，

$\therefore BE = BG = 2$ 、 $\angle GBE = \angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BGE$ 为等边三角形，

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} GE \cdot DQ = \frac{1}{2} GE \cdot BP = S_{\triangle BGE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】菱形的性质

【知识点】与中线或等分线有关的等积变换

【知识点】相似三角形的性质

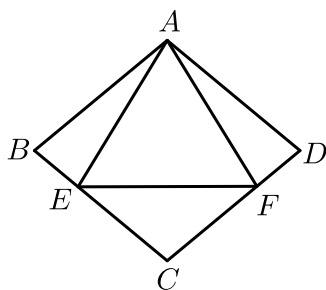
【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【知识点】相似三角形的判定-预备定理（平行）

【知识点】等边三角形的判定

【思想】数形结合思想

23. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $\triangle AEF$ 是等边三角形，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $AB = AE$ ，则 $\angle B$ 等于 _____ $^\circ$ 。



【答案】 80

【解析】 $\because AB = AE$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$ (等边对等角),

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$ (菱形的对角相等),

$AD \parallel BC$ $AB \parallel CD$ (菱形的对边平行),

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补),

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = 180^\circ$,

$\angle ABC = \angle ADC$,

$\angle ABE = \angle AEB$,

$\angle DCB + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore \angle AEC = \angle BCD$,

同理 $\angle BCD = \angle AFC$,

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形,

$\therefore \angle EAF = 60^\circ$ (等边三角形的三个角相等, 并且每个角都等于 60°),

$\therefore \angle EAF + \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 360^\circ$ $\angle EAF = 60^\circ$,

$\therefore \angle AEC + \angle ECF + \angle AFC = 300^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle AFC$ $\angle AEC = \angle BCD$,

$\therefore 3\angle ECF = 300^\circ$,

$\therefore \angle ECF = 100^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$ $\angle ECF = 100^\circ$,

$\therefore \angle B = 80^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补).

【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】等边三角形的性质

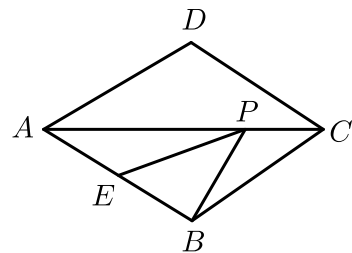
【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

【重点强调】

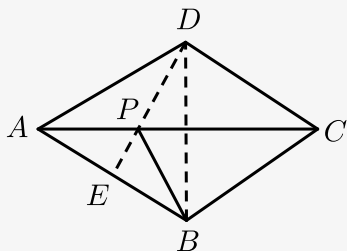
2015年天津津南区初三二模第17题3分

24. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, E 是 AB 的中点, P 是对角线 AC 上的一个动点, 则 $PE + PB$ 的最小值是 _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 连接 DE 交 AC 于点 P ，连接 BD ， BP 。



由菱形对角线互相垂直平分可知， B 、 D 关于 AC 对称，则 $PD = PB$ ，

$\therefore PE + PB = PE + PD = DE$ ，即 DE 就是 $PE + PB$ 的最小值。

$\because \angle BAD = 60^\circ$ ， $AD = AB$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形。

$\therefore AE = BE$ ，

$\therefore DE \perp AB$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{3}$ ，

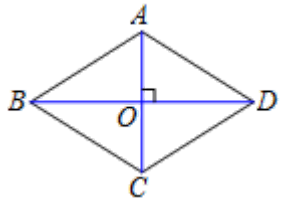
故 $PE + PB$ 的最小值为 $\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】菱形的性质

【重点强调】

2017~2018学年天津南开区天津市育贤中学初二下学期期中第16题3分

四、菱形的判定

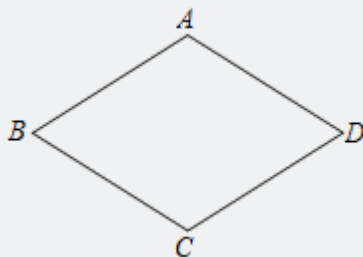
菱形$ABCD$ 	判定	一组邻边____的____是菱形． 书写：
		对角线互相____的____是菱形． 书写：
		四边____的____是菱形． 书写：

【教法备注】

菱形的判定：

(1) 定义：一组邻边相等的平行四边形是菱形．

书写：

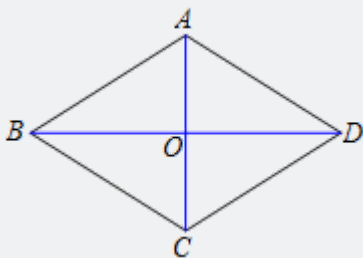


$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AB = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形．

(2) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

书写：

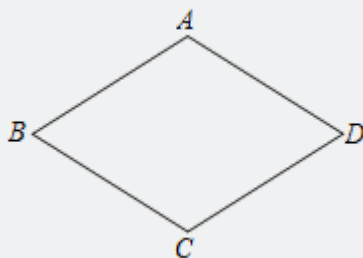


$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC \perp BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形．

(3) 四边相等的四边形是菱形．

书写：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 中 $AB = BC = CD = DA$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【总结】:

① 证明一个四边形是菱形, 一般情况下, 先证明它是一个平行四边形, 然后证明 “一组邻边相等” 或 “对角线互相垂直” 即可.

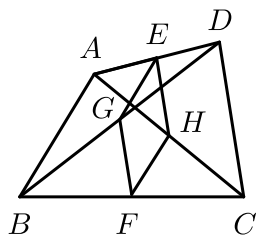
② 若直接证明一个四边形是菱形, 只要证明 “四条边相等” 即可.

③ 对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

④ 对角线平分一个内角的平行四边形是菱形 (平行 + 角平分线出等腰三角形).

|| 例题

25. 如图, 任意四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别是 AD 、 BC 、 BD 、 AC 的中点, 当四边形 $ABCD$ 满足条件 _____ 时, 四边形 $EGFH$ 是菱形. (填一个使结论成立的条件)



【答案】 $AB = CD$

【解析】 $\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是 AD 、 BC 、 BD 、 AC 的中点,

$$\therefore EG \parallel \frac{1}{2} AB,$$

$$EH \parallel \frac{1}{2} CD,$$

$$FG \parallel \frac{1}{2} CD,$$

$$FH \parallel \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore EG \parallel FH,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 为平行四边形,

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore EG = EH,$$

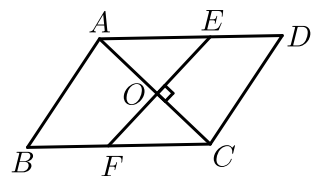
$\therefore$ 平行四边形 $EGFH$ 为菱形.

【标注】 【知识点】菱形的判定-从四边形

【重点强调】

2017~2018 学年 4 月天津河西区天津市培杰中学初二下学期月考第 17 题 3 分

26. 在平行四边形 $ABCD$ 中， O 是对角线 AC 的中点，过点 O 作 AC 的垂线与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F 。



- (1) 求证： $AE = CF$ 。
 (2) 连接 AF 、 CE ，判断四边形 $AFCE$ 的形状，并说明理由。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 四边形 $AFCE$ 是菱形，理由见解析。

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FCA,$$

$\because O$ 为 AC 中点

$$\therefore AO = OC,$$

$$\because EF \perp AC,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF,$$

易证 $\text{Rt}\triangle AOE \cong \text{Rt}\triangle COF(\text{ASA})$ 。

$$\therefore AE = CF.$$

(2) 由(1)得 $AE = CF$,

$$\because AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形，

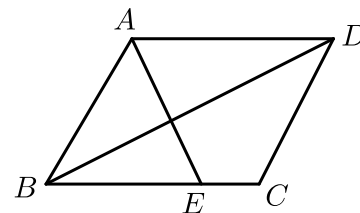
$$\because EF \perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形。

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

练习

27. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上的一点，连结 AE 、 BD 且 $AE = AB$ 。



(1) 求证： $\angle ABE = \angle EAD$.

(2) 若 $\angle AEB = 2\angle ADB$, 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle EAD ,$$

$$\because AE = AB ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EAD .$$

(2) $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBE ,$$

$$\because \angle ABE = \angle AEB , \angle AEB = 2\angle ADB ,$$

$$\therefore \angle ABE = 2\angle ADB ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABE - \angle DBE = 2\angle ADB - \angle ADB = \angle ADB ,$$

$$\therefore AB = AD ,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,

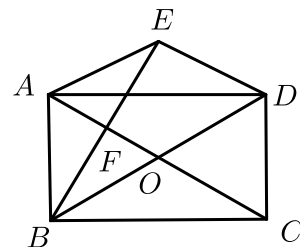
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 .

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

【重点强调】

2013~2014学年天津河西区初二下学期期末第18题6分

28. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 A 作 $AE \parallel BD$ ，过点 D 作 $ED \parallel AC$ ，两线相交于点 E .



(1) 求证：四边形 $AODE$ 是菱形 .

(2) 连接 BE ，交 AC 于点 F ，若 $BE \perp ED$ 于点 E ，求 $\angle AOD$ 的度数 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 120° .

【解析】 (1) $\because AE \parallel BD, ED \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $AODE$ 是平行四边形 ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,

$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD, AC = BD$,

$\therefore OA = OC = OD$,

$\therefore$ 四边形 $AODE$ 是菱形 .

(2) 连接 OE ，如图所示：

由 (1) 得：四边形 $AODE$ 是菱形，

$\therefore AE = OB = OA$,

$\because AE \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $AEOB$ 是平行四边形 ,

$\because BE \perp ED, ED \parallel AC$,

$\therefore BE \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 $AEOB$ 是菱形 ,

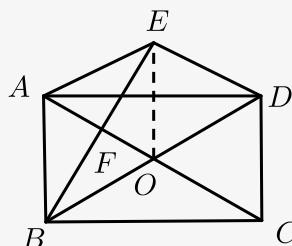
$\therefore AE = AB = OB$,

$\therefore AB = OB = OA$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形 ,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



【标注】 【知识点】平行四边形的性质及应用

【知识点】菱形的判定-从四边形

【知识点】矩形的性质

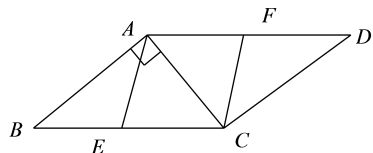
【知识点】矩形的判定及应用

【知识点】等边三角形的性质

【重点强调】

2016~2017学年天津滨海新区初二下学期期中第25题8分

29. 如图，已知 E 、 F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC ， AD 上的中点，且 $\angle BAC = 90^\circ$ 。



(1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形。

(2) 若 $\angle AEC = 60^\circ$ ， $AE = 10$ 。求菱形 $AECF$ 的面积。

【答案】(1) 证明见解析

(2) $50\sqrt{3}$

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 E 是 BC 边的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BC = CE.$$

$$\text{同理，} AF = \frac{1}{2}AD = CF,$$

$$\therefore AE = CE = AF = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形。

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 E 是 BC 边的中点，

$$\therefore AE = BE = CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAE.$$

$$\because \angle AEC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

$$\because AE = 10,$$

$$\therefore BC = 20.$$

$$\because AE = CE, \angle AEC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = AE = 10.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = 10$ ， $BC = 20$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}.$$

连接 EF 交 AC 于点 O ，如图所示．

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，

$$\therefore OA = OC,$$

$\therefore O$ 为 AC 中点．

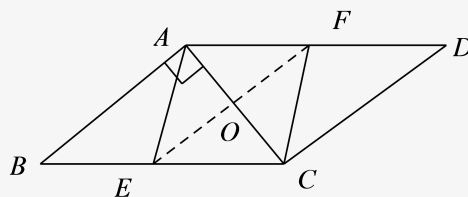
又 $\because E$ 为 BC 中点，

$\therefore OE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = 2OE = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{菱形} AECF \text{的面积} = \frac{1}{2}AC \times EF = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区初二下学期期中第21题10分